Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности

и, сравнивая её с представлением как функции от вида

он может вычислить её «спектр амплитуд» , её «отношения» и её «базу» .

*Определение 1*: «спектр амплитуд» , «отношения» и её «база» определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности в представлении (2). «Спектр амплитуд» описывает веса различных экспоненциальных компонент, «отношения» задают скорости изменения этих компонент, а «база» при удовлетворении { уравнению (2) и удовлетворении каждого отношения представляет собой предел последовательности при :

*Определение 2*: если { удовлетворяет уравнению (2) и одно или более , не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что « расходится от », и называется «антипределом» {. На практике антипредел предоставляет механизм для применения методов ускорения сходимости к последовательностям, которые формально расходятся. Это позволяет использовать преобразования, такие как методы Шенкса [2] или Эйлера [3], для извлечения значимых числовых результатов из последовательностей, не имеющих предела в классическом смысле.

Но многие последовательности, которые возникают естественным образом при решении задач, не могут быть представлены в виде (2), но можно во многих случаях сказать, что { почти -го порядка для некоторого , по крайней мере для больше некоторого фиксированного [1]. Тогда по аналогии с (2) стремимся определить локальную базу -го порядка , решая уравнений

(которые центрированы вокруг ) для величин , , , и рассматриваем как метод сходимости для {.

*Определение 3*: локальная база -го порядка определяется решением системы уравнений, аналогичной (2), для последовательностей, которые не могут быть точно представлены в виде (2), но имеют поведение, близкое к нему. Локальная база позволяет анализировать и ускорять сходимость последовательностей, которые формально расходятся.

Алгебраически получаем для формулу

где

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

а диагональное или преобразование Шенкса как

Обозначим

таким образом,

если определим

Таким образом, идентифицируем члены последовательности { с частичными суммами бесконечного ряда

Тогда можем легко проверить, что (5) для также получается, если решим для систему уравнений

Здесь имеется только уравнений для величин и с .

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать как функцию [2], вычисленную для целых значений , и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (2), и таким образом, получать информацию о поведении последовательности при из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (13), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций (как функций от ) для с произвольными коэффициентами и включая константный член . Шенкс показывает в своей статье, что если являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от , то преобразование работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших и является точно этой рациональной функцией во всей -плоскости. Однако функции очень похожи друг на друга, и кажется, неэффективным аппроксимировать функцию с помощью линейной комбинации таких положений функций, как это делается в (13).

Кроме того, аппроксимация с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности и .

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации с помощью других функций от . Он имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

*t-преобразование*. По аналогии с (13) записываем уравнений для последовательности [1]:

где – функции от , включающие произвольных констант, и стремимся решить систему (14) для полагая, что должно быть аппроксимацией предела последовательности . Если последовательность расходится, но одномерная последовательность {, которую можем сформировать из, стремится к пределу , то будем называть антипределом относительно соответствующего преобразования.

В случае получаем два уравнения

и хотим выбрать такое, чтобы

то есть, чтобы

Предположим, что каким-то образом нашли функцию . Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для определяем

где – константы, которые должны быть определены из (14), в то время как – функции от , которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (14) теперь принимают форму:

Для удобства обозначим , и получаем с помощью правила Крамера:

Детерминанты в не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

и при условии, что для любого *n*, можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт результат

Теперь нужно подходящее выражение для , которое обладает свойством, выраженным в (17).

По аналогии с (13) теперь записываем уравнений для последовательности .

Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с . Однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как и преобразования Эйлера, часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм чередующихся рядов:

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для , которая подходит для таких последовательностей. Если предполагаем, что является достаточно гладкой функцией от , и что

(когда последовательность расходится, – антипредел), то очевидно, что

и более точно

В соответствии с (19) видим, что достаточно выбрать с точностью до константного множителя, и поэтому берём

Кроме того, является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда имеет порядок величины , и если имеет антипредел относительно разрабатываемого преобразования, то для больших

что именно то, что требуется от (см. (17)). Соответственно, принимая , можем ожидать получения из (22) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами чередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда.

При условии, что для всех , подставляем в (22) и получаем

Видим из (29), что является взвешенным средним последовательности и использует , а сами веса зависят от . Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей , является нелинейным. Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

**Вход**:– ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

Получить , ,

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

Вычислить необходимые частичные суммы (23)

**if** : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else**:

Инициализировать:  
Числитель = 0  
Знаменатель = 0  
 **for** от до :

**if** [текущий индекс] – [текущий индекс - 1] **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»  
Числитель += #**(29)**  
Знаменатель += #**(29)**

**if** Знаменатель : **return** Числитель / Знаменатель

**else**: **return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

*Рисунок 1*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: = , ,

**Выход**: = 0.7854

*Рисунок 2*. Пример применения -преобразования.

Теперь определим преобразование аналогично преобразованию Шенкса:

Также определяем преобразование

Это определение не соответствует диагональному преобразованию Шенкса, но и имеют общее – для последовательности , начиная с , ассоциируем последовательность согласно

так что начинается с , тогда как , так и зависят лишь от . Предполагаем обозначить это слегка модифицированное диагональное преобразование Шенкса (лишь в индексации) как :

Таким образом, можем сказать, что и оба зависят от первых элементов последовательности . Также в ряде случаев и оказываются наиболее эффективными преобразованиями из и соответственно.

Важно отметить принципиальную разницу между - и -преобразованиями. Обращаясь к (5) и (29), видим, что способ нумерации членов последовательности влияет на , но не на -преобразования, так как индекс появляется (то есть не только как индекс) в формуле для , но не в формуле для . Таким образом, на самом деле представляет собой целую последовательность преобразований в зависимости от того, как нумеруем первый член последовательности. Например, можно нумеровать члены последовательностей с , но нетрудно придумать примеры (например, частичные суммы экспоненциального ряда для больших положительных ), где другая нумерация даёт лучшие результаты.

*Свойства - и -преобразований*. Преобразования ,, или в общем, любое преобразование , которое можно сформировать из (29), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

где используется для обозначения последовательности

содержащей каждый член, равный одной и той же константе . Доказательство этого элементарно.

Преобразования , не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых и приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то и сходятся к пределу . Это можно показать, записав преобразование , например, в форме метода суммирования , где . Тогда для фиксированного чередующегося ряда можем использовать теорему Сильвермана-Тёплица, чтобы показать, что является регулярным методом суммирования, который, в частности, суммирует к его пределу.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое , при применении к определённому классу чередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для и, что . Кроме того, для Шенкс доказал следующий результат [1].

Если – полиномы степеней , соответственно, и не обращается в ноль при – положительном целом числе или нуле, и если

то

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого , при применении к последовательности (37). Теперь установим результат этого типа для .

Предположим теперь, что является последовательностью

когда и имеет разложение вида

и для – положительного целого числа. Тогда нетрудно по вычислению, аналогичному тому, что у Шенкса, показать, что

Легко показать, что, если сходится, сходится к тому же пределу, и (41) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

*u-преобразование*. Рассмотрим последовательность

для которой

Как объяснялось раннее, не ожидается, что или будут особенно эффективны для этого ряда, и вычисления это подтверждают [1]. Однако простым изменением можно получить преобразование, которое даёт очень хорошие результаты для таких медленно сходящихся монотонных рядов.

Рассмотрим ряд

когда имеет асимптотическое разложение

и , так что ряд сходится. Пробуем получить выражение для , которое подходит для такого рода. Запишем

и тогда в соответствии с (17) нужно

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (45) для как функцию от , определённую для всех положительных действительных , и сравнивая

с интегралом

Таким образом, находим

и так как достаточно определить с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

Подставляем это в (22) и получаем величину , заданную

Здесь стоит отметить, что это уравнение для очень похоже на (29) для и может быть получено из (19), взяв как прежде, но выбрав вместо как в (21). Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

**Вход**:– ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

Получить , ,

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

**if** : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else**:

Инициализировать:  
Числитель = 0  
Знаменатель = 0  
 **for** от до :

**if** [текущий индекс] – [текущий индекс - 1] **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»  
Числитель += #**(50)**  
Знаменатель += #**(50)**

**if** Знаменатель : **return** Числитель / Знаменатель

**else**: **return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

*Рисунок 3*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: = , ,

**Выход**: = 1.5239

*Рисунок 4*. Пример применения-преобразования.

Так же, как с помощью определили -преобразования, теперь определяем *u*-преобразования с помощью . В особенности, определяем

Как для -преобразований, наблюдаем, что -преобразования удовлетворяют условиям (34) и (35), и можем показать, что последовательности частичных сумм сходящихся чередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей и оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей -преобразования более эффективны.

*-преобразования.* -преобразование, которое сейчас будет представлено, является примером использования известных преобразований для получения более эффективных преобразований. Начнём с преобразования , применённого к любой последовательности [1]:

Предполагая, что является аппроксимацией предела или антипредела , можем использовать (17), чтобы получить выражение для :

Подстановка этого значения для в (22) даёт

Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

**Вход**:– ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

Получить , ,

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

**if** : **return** «Ошибка: должен быть »

Вычислить необходимые частичные суммы (аналогично 23)

**if** : **return** "Ошибка: недостаточно данных"

**else**:

Инициализировать:  
Числитель, Знаменатель = 0  
 **for** от до :

**if** [текущий индекс] – [текущий индекс - 1] **or**

текущий индекс = 0: **return** «Ошибка: нулевая разность»  
Числитель += #**(55)**  
Знаменатель += #**(55)**

**if** Знаменатель : **return** Числитель / Знаменатель

**else**: **return** «Ошибка: нулевой знаменатель»

*Рисунок 5*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: = ,

**Выход**: = 0.6806

*Рисунок 6*. Пример применения-преобразования.

Используя , определяем *v*-преобразования

Также -преобразования имеют свойства (34) и (35), и они регулярны для последовательностей, сгенерированных как частичные суммы чередующихся рядов. -преобразования так же хороши, как - или -, разница же заключается в том, что они хороши для обоих типов рядов.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного чередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда *u*- или *v*-преобразование должно быть подходящим.

Преобразования -, -, - могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций , имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции .

Список литературы

1. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // International Journal of Computer Mathematics // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.
2. Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.
3. A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Journal of Computational and Applied Mathematics // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.